

الأدهم
فى
الهندسة الفراغية
الصف الثانى الثانوى
عام وأزهر
٢٠٢٠
هدية مجانية
إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧



الدرس الأول
المستقيمات والمستويات فى الفراغ

ملاحظات هامة

١- أى نقطة فى الفراغ.
يمر بها عدد لانهائى من المستقيمات وعدد لانهائى من المستويات

٢- أى نقطتين فى الفراغ.
يمر بها مستقيم واحد - عدد لانهائى من المستويات

٣- أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
يمر بها مستوى واحد فقط.

ثانياً: كيفية تعيين المستوى

١- ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

٢- مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه

٣- مستقيمان متقاطعان

٤- مستقيمان متوازيان غير منطبقين

● المستقيمان المتخالفان
هما مستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين ولا يجمعهما مستوى واحد.

● إذا اشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة فإن ----
المستقيم يقع بتمامه داخل المستوى.

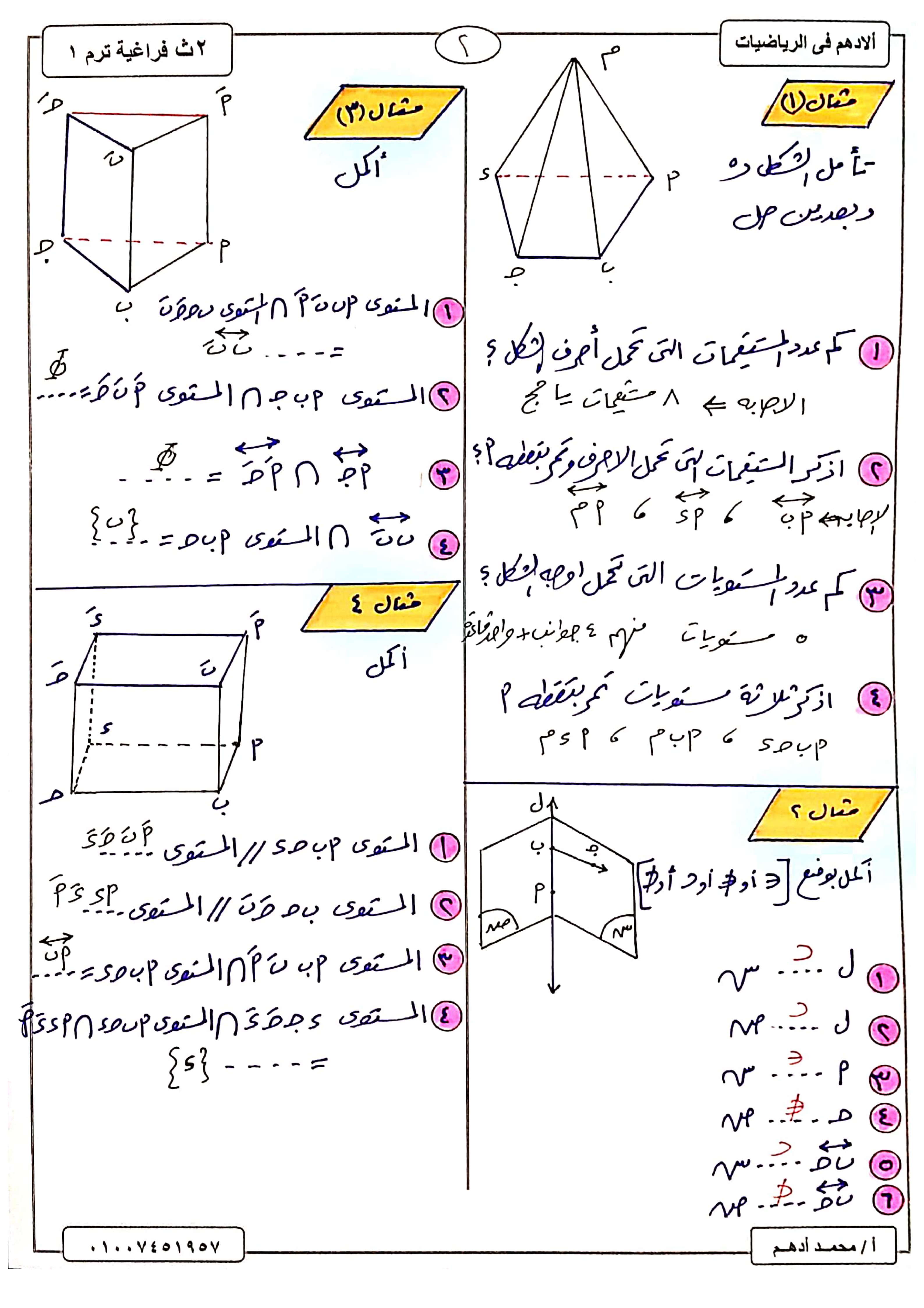
● إذا اشترك مستويان مختلفان فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة.

● إذا تقاطعت ثلاث مستويات فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تكون
① متوازية ② متقاطعة جميعاً فى نقطة واحدة. ⟸ تكون متقاطعة على التقاطع

● المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ
يكونان متوازيان

● فى الفراغ
المستقيمات الرأسية كلها متوازية
ولكن المستقيمات الأفقية ليست دائماً متوازية

● اقل عدد من المستويات تحدد سطح لجسم هو ٤
(الهرم الثلاثى)



مثال (١)

تأمل الشكل ده وبعدين حل

(١) كم عدد المستقيمات التى تحمل أحرف الشكل ؟

الاجابة ⇐ ٨ مستقيمات يا جميل

(٢) اذكر المستقيمات التى تحمل الاحرف وتمر بالنقطة أ ؟

الاجابة ⇐ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أم}}$

(٣) كم عدد المستويات التى تحمل اوجه الشكل ؟

٥ مستويات منهم ٤ جوانب + واحد قاعدة

(٤) اذكر ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ

أ ب جـ د ، أ ب م ، أ د م

مثال ٢

أكمل بوضع [⊂ أو ⊄ أو ∈ أو ∉]

(١) ل ⊂ س

(٢) ل ⊂ ص

(٣) أ ∈ س

(٤) جـ ∉ ص

(٥) $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ⊂ س

(٦) $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ⊄ ص

مثال (٣)

أكمل

(١) المستوى أ ب بَ أَ ∩ المستوى ب جـ جَ بَ = $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$

(٢) المستوى أ ب جـ ∩ المستوى أَ بَ جَ = ∅

(٣) $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أَجَ}}$ = ∅

(٤) $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$ ∩ المستوى أ ب جـ = {ب}

مثال ٤

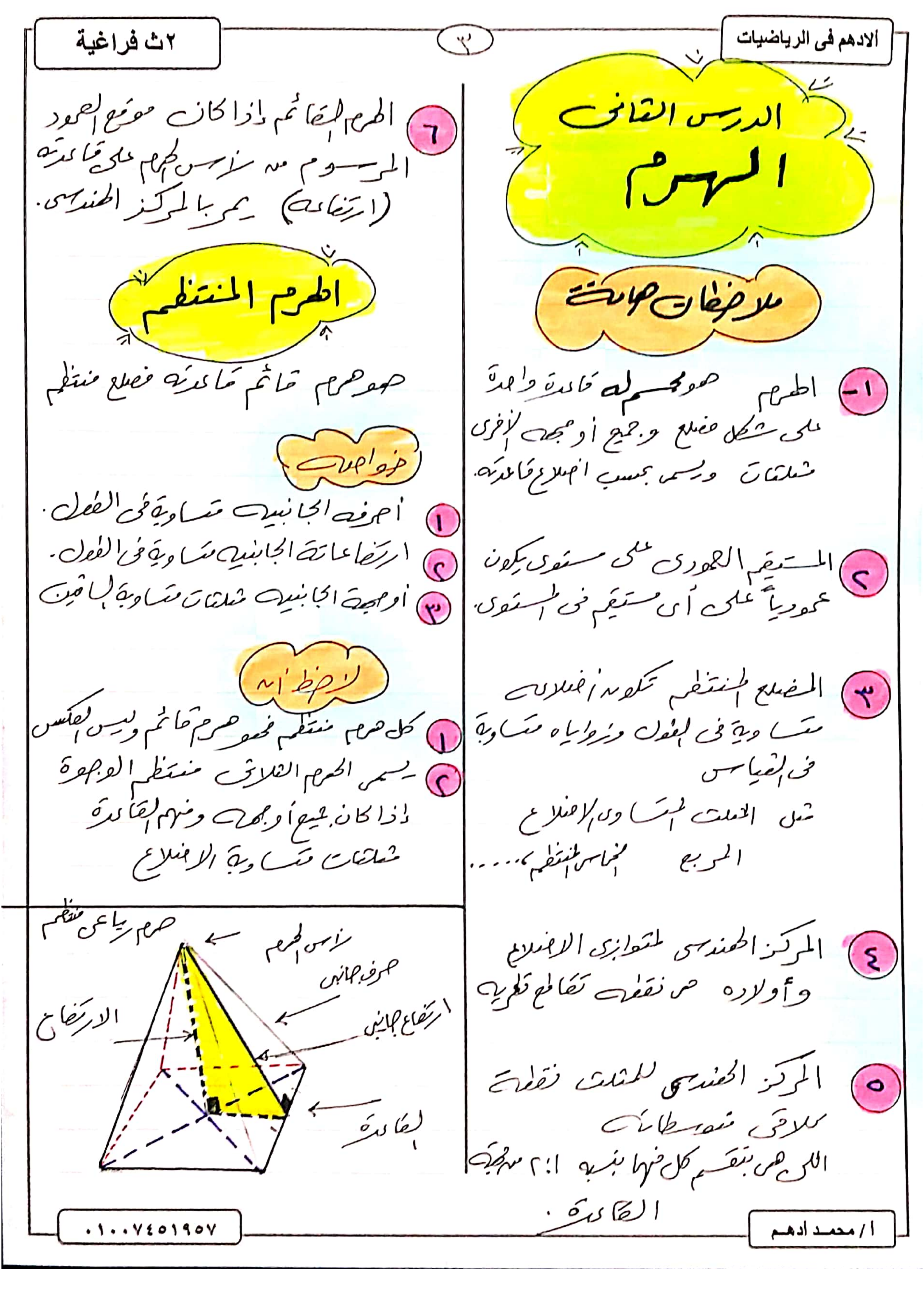
أكمل

(١) المستوى أ ب جـ د // المستوى أَ بَ جَ دَ

(٢) المستوى ب جـ جَ بَ // المستوى أ د دَ أَ

(٣) المستوى أ ب بَ أَ ∩ المستوى أ ب جـ د = $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

(٤) المستوى د جـ جَ دَ ∩ المستوى أ ب جـ د ∩ أ د دَ أَ = {د}



الدرس الثانى
الهرم

ملاحظات هامة

١- الهرم هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى مثلثات ويسمى بحسب أضلاع قاعدته.

٢- المستقيم العمودى على مستوى يكون عمودياً على أى مستقيم فى المستوى.

٣- المضلع المنتظم تكون أضلاعه متساوية فى الطول وزواياه متساوية فى القياس
مثل المثلث المتساوى الأضلاع
المربع الخماسى المنتظم،.....

٤- المركز الهندسى لمتوازى الأضلاع هو نقطة تقاطع قطريه

٥- المركز الهندسى للمثلث نقطة تلاقى متوسطاته اللى هى بتقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة القاعدة.

٦- الهرم القائم إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته (ارتفاعه) يمر بالمركز الهندسى.

الهرم المنتظم

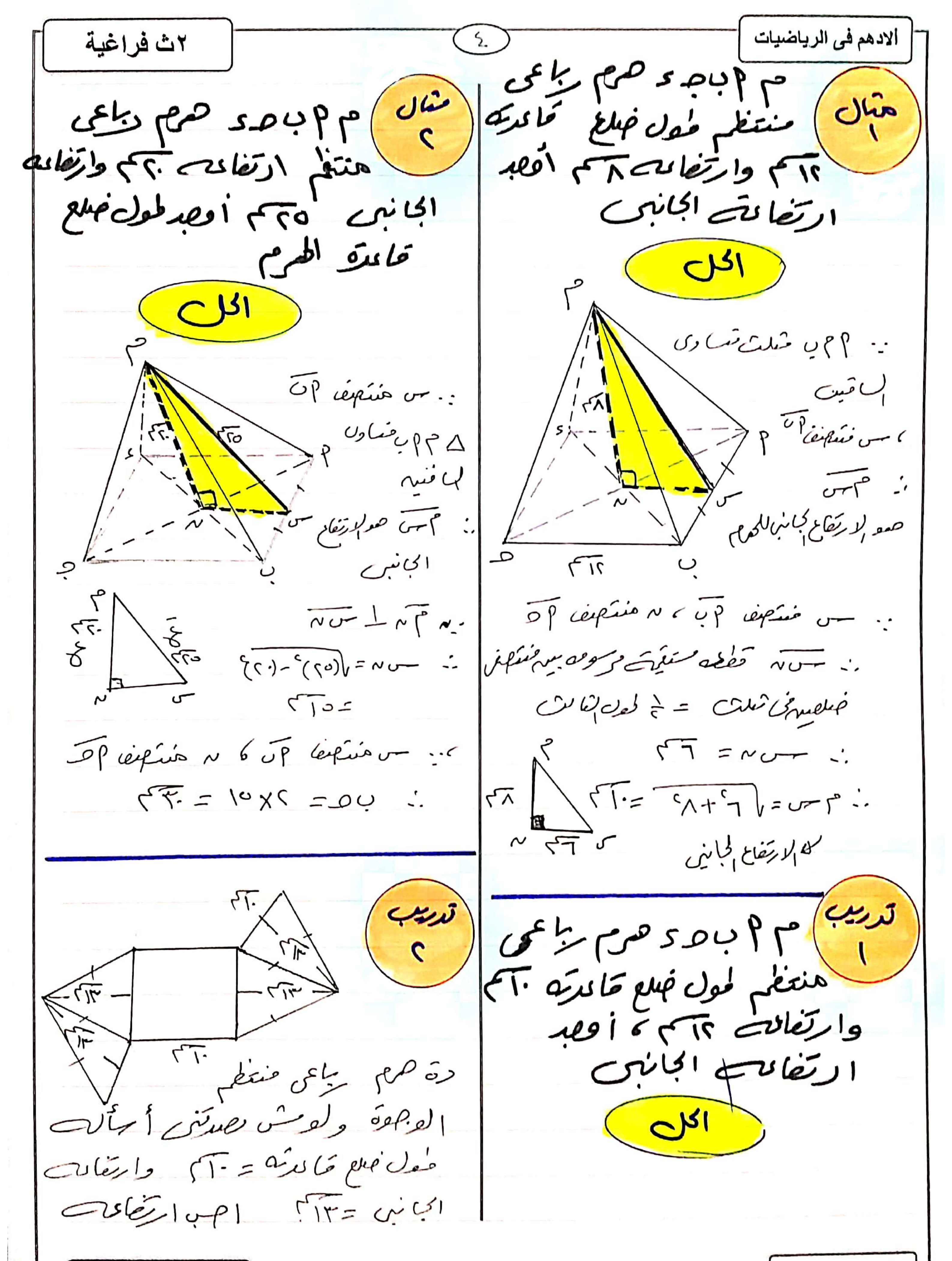
هو هرم قائم قاعدته مضلع منتظم

خواصه

١ أحرفه الجانبية متساوية فى الطول.
٢ ارتفاعاته الجانبية متساوية فى الطول.
٣ أوجهه الجانبية مثلثات متساوية الساقين

ملاحظة

١ كل هرم منتظم هو هرم قائم وليس العكس
٢ يسمى الهرم الثلاثى منتظم الأوجه إذا كان جميع أوجهه ومنهم القاعدة مثلثات متساوية الأضلاع



مثال ١

م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم أوجد ارتفاعه الجانبي

الحل

∵ م أ ب مثلث متساوي الساقين ، س منتصف أب

∴ م س هو الارتفاع الجانبي للهرم

∵ س منتصف أب ، ن منتصف أجـ

∴ س ن قطعة مستقيمة مرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث = ½ طول الثالث

∴ س ن = ٦ سم

∴ م س = $\sqrt{6^2 + 8^2}$ = ١٠ سم = الارتفاع الجانبي

تدريب ١

م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم ، أوجد ارتفاعه الجانبي

الحل

مثال ٢

م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٢٠ سم وارتفاعه الجانبي ٢٥ سم أوجد طول ضلع قاعدة الهرم

الحل

∵ س منتصف أب

∵ △ م أ ب متساوي الساقين

∴ م س هو الارتفاع الجانبي

∵ م ن ⊥ س ن

∴ س ن = $\sqrt{(25)^2 - (20)^2}$ = ١٥ سم

∵ س منتصف أب ، ن منتصف أجـ

∴ ب جـ = ٢ × ١٥ = ٣٠ سم

تدريب ٢

ده هرم رباعي منتظم الوجوه ولو مش مصدقني أسأله

طول ضلع قاعدته = ١٠ سم وارتفاعه الجانبي = ١٣ سم احسب ارتفاعه

مثال ٣

م ا ب جـ هرم ثلاثي منتظم قاعدته △ ا ب جـ طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٤ سم أوجد طول حرفه وارتفاعه الجانبي

الحل

∵ △ ا ب جـ متساوي الأضلاع

∵ س منتصف ا ب

ب س = ٣ سم

∴ جـ س = $\sqrt{٦^٢ - ٣^٢}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم

∵ نقطة تلاقي متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١ من جهة القاعدة

∴ $\frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$

∴ س ن = $\sqrt{٣}$ سم

∴ م س = $\sqrt{(٤)^٢ + (\sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{١٩}$ سم ← الارتفاع الجانبي

∵ م س ⊥ ا ب

∴ م ا = $\sqrt{(\sqrt{١٩})^٢ + ٣^٢}$ = ٢ $\sqrt{٧}$ سم

وهو طول حرف الهرم

ملاحظات

لأي مجسم قاعدته منتظمة فضلعه يكون ن

[عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢]

(١) في الهرم الخماسي

عدد الأوجه = ٦ عدد الرؤوس = ٦

عدد الأحرف = ١٢ - ٢ = ١٠

(٢) في الهرم السداسي

عدد الأوجه = ٧ عدد الرؤوس = ٧

عدد الأحرف = ١٤ - ٢ = ١٢

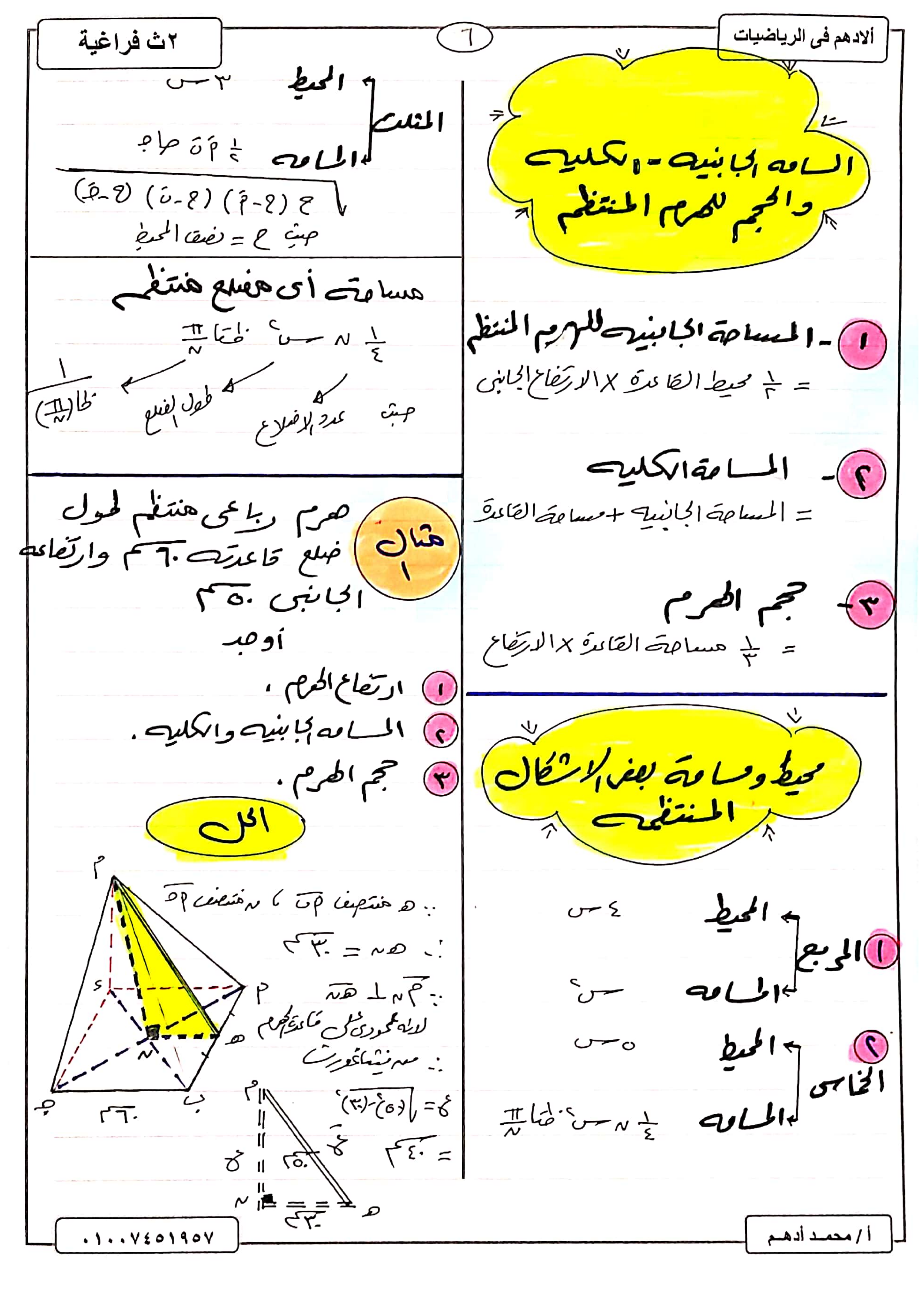
(٣) في الهرم الثلاثي

عدد الأوجه = ٤ عدد الرؤوس = ٤

عدد الأحرف = ٨ - ٢ = ٦



معلش هى أول 80 سنة من
حياة الإنسان بتبقى صعبة شوية
بس بعدها بيرتاح خالص



المساحة الجانبية والكلية والحجم للهرم المنتظم

① - المساحة الجانبية للهرم المنتظم

= $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

② - المساحة الكلية

= المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

③ - حجم الهرم

= $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

محيط ومساحة بعض الأشكال المنتظمة

① المربع
- المحيط: ٤ س
- المساحة: س²

② الخماسي
- المحيط: ٥ س
- المساحة: $\frac{1}{4}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

المثلث
- المحيط: ٣ س
- المساحة: $\frac{1}{2}$ أ̄ ب̄ حا جـ

$\sqrt{ح (ح - أ) (ح - ب) (ح - جـ)}$

حيث ح = نصف المحيط

مساحة أي مضلع منتظم

$\frac{1}{4}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

حيث: ن عدد الأضلاع ، س طول الضلع ، ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{ظا(\frac{\pi}{ن})}$

مثال ١

هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٦٠ سم وارتفاعه الجانبي ٥٠ سم

أوجد

① ارتفاع الهرم ،

② المساحة الجانبية والكلية .

③ حجم الهرم .

الحل

∵ هـ منتصف أب̄ ، ن منتصف أجـ̄

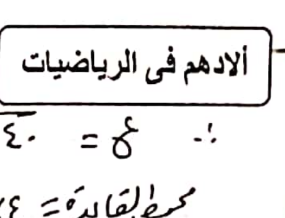
∴ هـ ن = ٣٠ سم

∵ م̄ن ⊥ هـ̄ن لأنه عمودي على قاعدة الهرم

∴ من فيثاغورث

ع = $\sqrt{(٥٠)^2 - (٣٠)^2}$

= ٤٠ سم



∴ ع = ٤٠ سم   ع = ٥٠ سم

محيط القاعدة = ٤ × طول الضلع = ٤ × ٦٠ = ٢٤٠ سم

مساحة القاعدة = طول الضلع × نفسه = (٦٠)² = ٣٦٠٠ سم²

المساحة الجانبية للهرم

= ½ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= ½ × ٢٤٠ × ٥٠ = ٦٠٠٠ سم²

المساحة الكلية للهرم

= المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٦٠٠٠ + ٣٦٠٠ = ٩٦٠٠ سم²

حجم الهرم

= ⅓ مساحة القاعدة × الارتفاع

= ⅓ × ٣٦٠٠ × ٤٠ = ٤٨٠٠٠ سم³

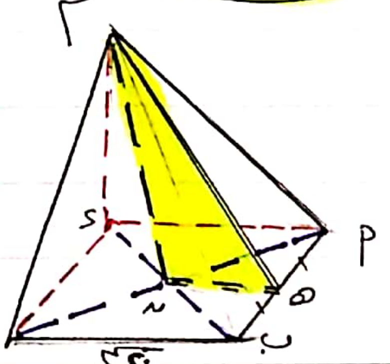
مثال ٢

هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠√٣ سم أوجد

١) المساحة الجانبية

٢) حجم الهرم

الحل



م
١٠√٣
ع
ع̄
ن
هـ
١٠ سم

ع̄ = √((١٠√٣)² + (١٠)²) = ٢٠ سم

∴ ع = ١٠√٣ سم   ع̄ = ٢٠ سم

محيط القاعدة = ٤ × طول الضلع = ٤ × ٢٠ = ٨٠ سم

مساحة القاعدة = طول الضلع × نفسه = (٢٠)² = ٤٠٠ سم²

المساحة الجانبية = ½ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= ½ × ٨٠ × ٢٠ = ٨٠٠ سم²

حجم الهرم = ⅓ مساحة القاعدة × الارتفاع

= ⅓ × ٤٠٠ × ١٠√٣ = ٤٠٠٠√٣ / ٣ سم³

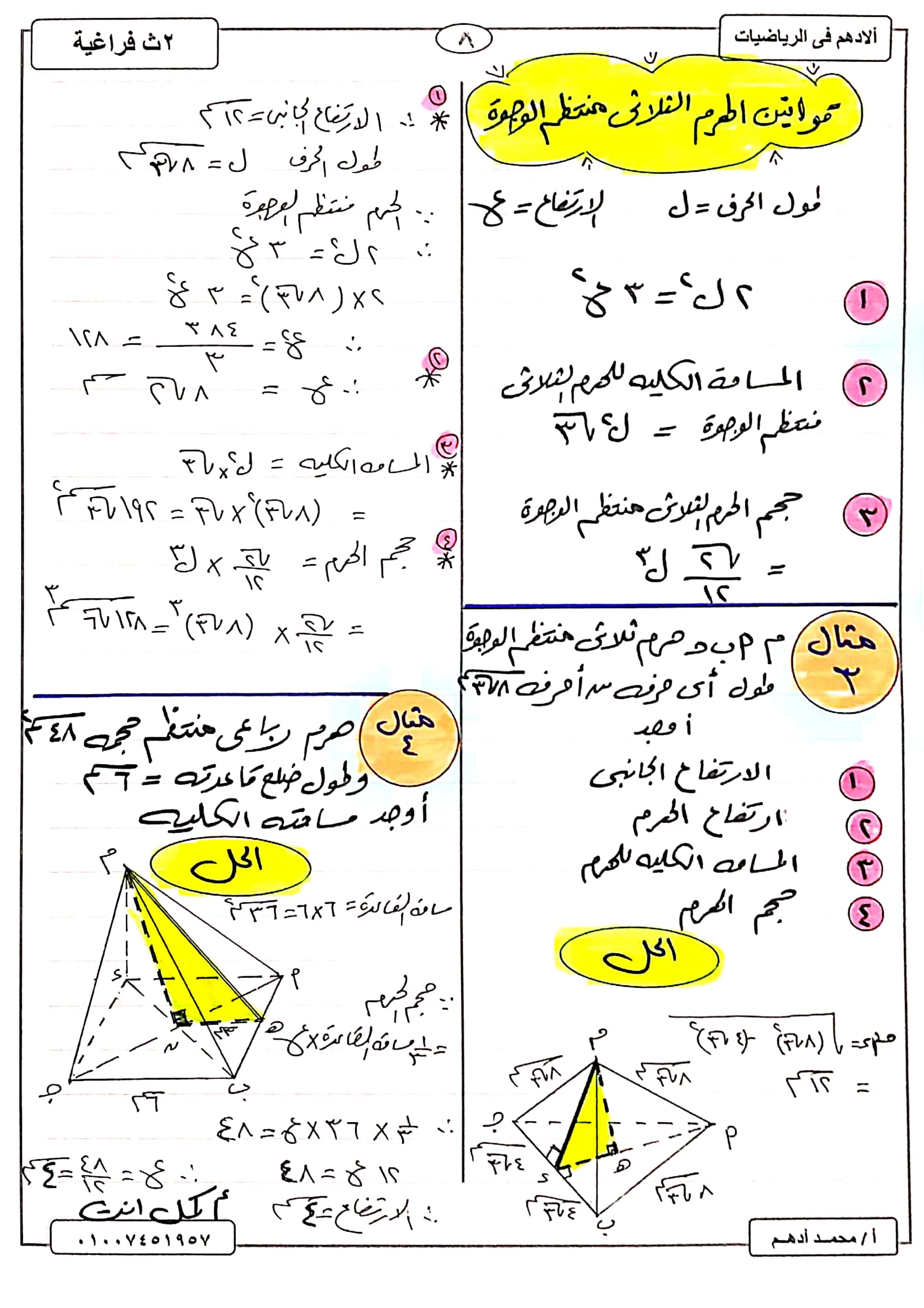


طول قطر المربع = طول الضلع × √٢

طول ضلع المربع = طول قطره / √٢

تدريب

هرم رباعي منتظم طول قطر قاعدته ٢٤√٢ سم وارتفاعه الجانبي = ٢٠ سم أوجد مساحته الكلية وحجمه



قوانين الهرم الثلاثى منتظم الأوجه

طول الحرف = ل　　الارتفاع = ع

① ٢ ل² = ٣ ع²

② المساحة الكلية للهرم الثلاثى منتظم الأوجه = ل² √٣

③ حجم الهرم الثلاثى منتظم الأوجه = (√٢ / ١٢) ل³

مثال ٣

م أ ب ج هرم ثلاثى منتظم الأوجه طول أى حرف من أحرفه ٨√٣ سم

أوجد

① الارتفاع الجانبى

② ارتفاع الهرم

③ المساحة الكلية للهرم

④ حجم الهرم

الحل

م هـ = √((٨√٣)² − (٤√٣)²)

= ١٢ سم

① ∵ الارتفاع الجانبى = ١٢ سم

طول الحرف ل = ٨√٣ سم

∵ الهرم منتظم الأوجه

∴ ٢ ل² = ٣ ع²

٢ × (٨√٣)² = ٣ ع²

∴ ع² = ٣٨٤ / ٣ = ١٢٨

② ∴ ع = ٨√٢ سم

③ المساحة الكلية = ل² × √٣

= (٨√٣)² × √٣ = ١٩٢√٣ سم²

④ حجم الهرم = (√٢ / ١٢) × ل³

= (√٢ / ١٢) × (٨√٣)³ = ١٢٨√٦ سم³

مثال ٤

هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم³ وطول ضلع قاعدته = ٦ سم

أوجد مساحته الكلية

الحل

مساحة القاعدة = ٦ × ٦ = ٣٦ سم²

∵ حجم الهرم = ⅓ مساحة القاعدة × ع

∴ ⅓ × ٣٦ × ع = ٤٨

١٢ ع = ٤٨　∴ ع = ٤٨ / ١٢ = ٤ سم

∴ الارتفاع = ٤ سم

أكمل انت

مثال ٥

م أ ب جـ هرم ثلاثي رأسه م على بعد $٤\sqrt{٥}$ سم من قاعدته أ ب جـ وفيه أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ جـ = ٩ سم أوجد حجم الهرم

الحل

محيط المثلث = ٧ + ٨ + ٩ = ٢٤

نصف المحيط ع = $\frac{٢٤}{٢}$ = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث أ ب جـ =

$$= \sqrt{ع\,(ع - أب)\,(ع - بجـ)\,(ع - أجـ)}$$

$$= \sqrt{١٢ \times ٥ \times ٤ \times ٣} = ١٢\sqrt{٥}\ \text{سم}^٢$$

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= \frac{١}{٣} \times ١٢\sqrt{٥} \times ٤\sqrt{٥}$$

$$= ٨٠\ \text{سم}^٣$$

مثال ٦

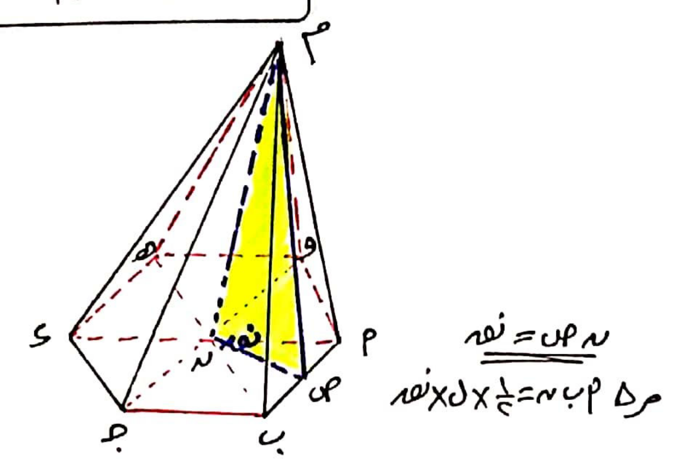
هرم سداسي منتظم فيه مجموع مساحات الأوجه الجانبية سبعة أمثال مساحة القاعدة أثبت أن حجم الهرم = ٨ نق^٣ حيث نق طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل القاعدة.

الحل

نفرض أن طول ضلع السداسي = ل

وارتفاع الهرم = ع

والارتفاع الجانبي = عَ



ن ص = نق

م $\triangle$ أ ب ن = $\frac{١}{٢}$ × ل × نق

∵ مجموع مساحات الأوجه الجانبية = ٧ × مساحة القاعدة

∴ $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × عَ = ٧ × مساحة القاعدة

$\frac{١}{٢}$ × ٦ ل × عَ = ٧ × مساحة ٦ مثلثات

$\frac{١}{٢}$ × ٦ ~~ل~~ × عَ = ٧ × $\frac{١}{٢}$ ~~ل~~ نق × ٦

∴ **عَ = ٧ نق**

∵ م ن ⊥ المستوى أ ب جـ د هـ و

∴ م ن ⊥ ن ص

∴ $\triangle$ م ن ص قائم الزاوية في ن

∴ ع = $\sqrt{(عَ)^٢ - نق^٢} = \sqrt{(٧نق)^٢ - نق^٢}$

ع = $٤\sqrt{٣}$ نق

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢}$ × ل × نق × ٦ × $٤\sqrt{٣}$ نق

= $٤\sqrt{٣}$ ل نق^٢

، ∵ $\frac{نق}{جا٦٠} = \frac{ل}{جا٩٠}$ ∴ نق = ل جا٦٠

∴ ل = $\frac{نق}{جا٦٠} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ نق

∴ حجم الهرم = $٤\sqrt{٣} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ نق^٣ = ٨ نق^٣ #

الواجب

(١) م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه ١٢ سم ، أوجد ارتفاعه الجانبي (١٣ سم)

(٢) م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٢٠ سم ، وارتفاعه الجانبي ٢٥ سم . أوجد طول ضلع قاعدة الهرم . (٣٠ سم)

(٣) هرم الجيزة الأكبر "خوفو" هو هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٣٢ متراً ، وارتفاعه الجانبي ١٨٦ متراً . أوجد ارتفاع الهرم . (١٤٥,٤ م)

(٤) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠√٣ سم أوجد :
المساحة الجانبية . (٨٠٠ سم²)
حجم الهرم . ($\frac{٤٠٠٠}{٣}$√٣ سم³)

(٥) احسب لأقرب رقم عشري واحد حجم هرم خماسي منتظم ، طول ضلع قاعدته = ١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم . (١٧٦١,٨ سم³)

(٦) هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبي ١٠√٣ سم أوجد :
(أ) مساحته الجانبية . (٣٦٠√٣ سم²)
(ب) مساحته الكلية . (٥٧٦√٣ سم²)

(٧) هرم رباعي منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم² وارتفاعه الجانبي ٢٠ سم أوجد حجمه ، (٣٥٠٠ سم³)

(٨) باستخدام الشبكة التي أمامك صف الجسم وأوجد مساحته الكلية وحجمه



(ده هرم ثلاثي منتظم الأوجه)

(٩) تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى كما بالشكل المقابل .

٣٠
٢٣

(أ) أوجد مساحة الورق المقوى لإنتاج ١٠٠٠ عبوة
(المساحة الكلية × ١٠٠٠)

(ب) احسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كانت تكلفة المتر المربع الواحد = ١٥ جنيها .
١٥ × (المساحة الكلية × ١٠٠٠)

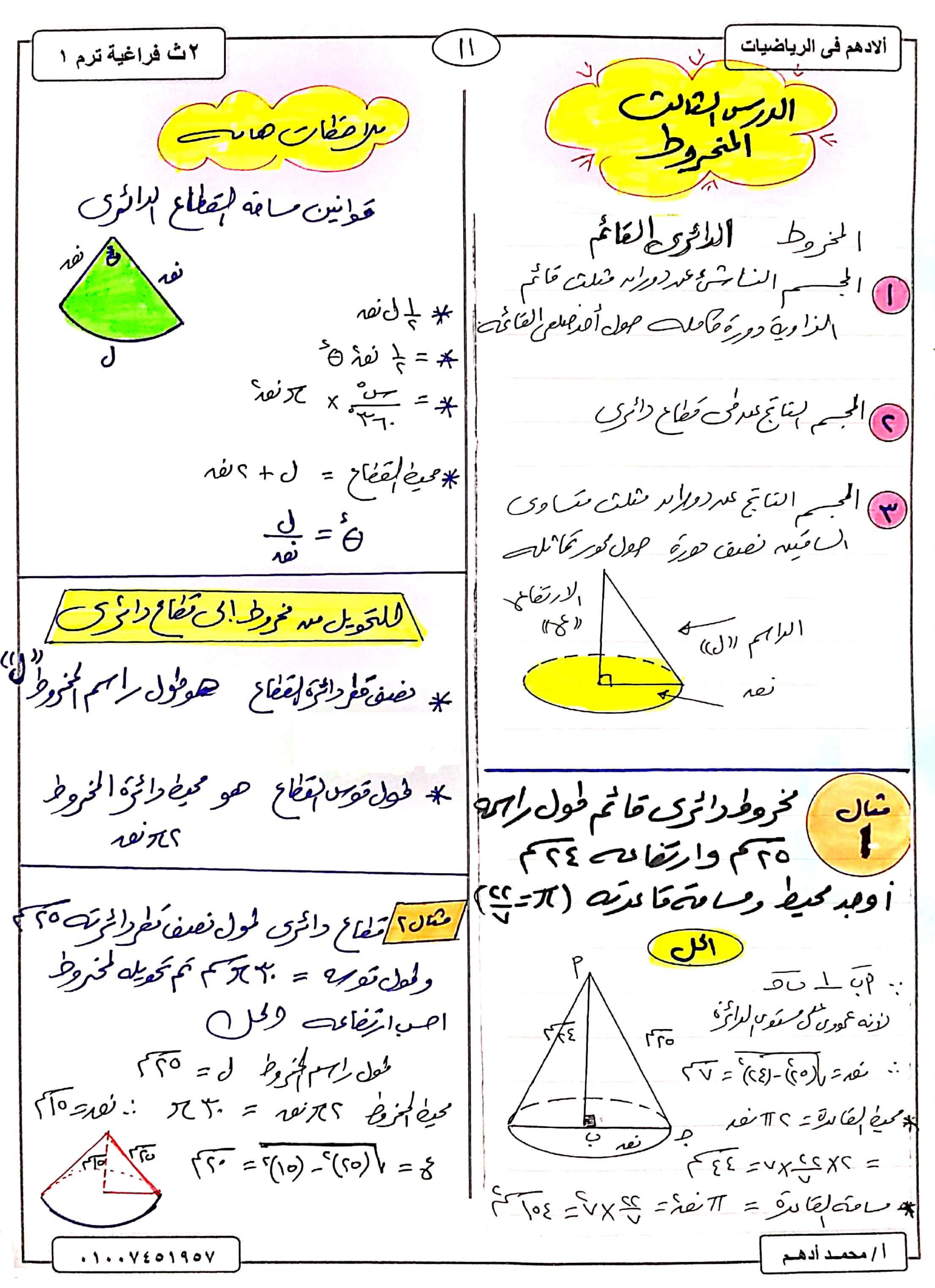
(١٠) النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي منتظم الأوجه : ارتفاعه = ----- : -----

∵ ل² = ع٣

ل√٢ = ع√٣

∴ $\frac{ل}{ع} = \frac{√٣}{√٢} = \frac{√٦}{٢}$ بالضرب √٢

= √٦ : ٢



الدرس الثالث
المخروط

المخروط الدائري القائم

١ الجسم الناشئ عند دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة

٢ الجسم الناتج عند طي قطاع دائري

٣ الجسم الناتج عند دوران مثلث متساوي الساقين نصف دورة حول محور تماثله

مثال ١ مخروط دائري قائم طول راسمه ٢٥ سم وارتفاعه ٢٤ سم أوجد محيط ومساحة قاعدته ($\pi = \frac{22}{7}$)

الحل

∵ $\overline{\text{م ب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

لأنه عمودي على مستوى الدائرة

∴ نق $= \sqrt{(25)^2 - (24)^2} = 7$ سم

* محيط القاعدة $= 2\pi$ نق

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44$ سم

* مساحة القاعدة $= \pi$ نق$^2 = \frac{22}{7} \times 7^2 = 154$ سم²

ملاحظات هامة

قوانين مساحة القطاع الدائري

* $\frac{1}{2}$ ل نق
* $= \frac{1}{2}$ نق^2 $\theta^{ء}$
* $= \frac{س^\circ}{360} \times \pi$ نق^2
* محيط القطاع = ل + ٢ نق

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

التحويل من مخروط إلى قطاع دائري

* نصف قطر دائرة القطاع هو طول راسم المخروط ((ل))
* طول قوس القطاع هو محيط دائرة المخروط 2π نق

مثال ٢ قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٢٥ سم وطول قوسه $= 30\pi$ سم تم تحويله لمخروط احسب ارتفاعه

الحل

طول راسم المخروط ل = ٢٥ سم

محيط المخروط 2π نق $= 30\pi$ ∴ نق = ١٥ سم

ع $= \sqrt{(25)^2 - (15)^2} = 20$ سم

مثال ٣ قطاع دائرى مساحته ٢٥ط سم٢ وقياس زاويته المركزية = ٩٠° تحول إلى مخروط دائرى قائم أوجد ارتفاعه

الحل

القطاع

$\frac{٩٠}{٣٦٠} \times$ ط نق٢ = ٢٥ط

$\frac{نق^٢}{٤}$ = ٢٥

نق٢ = ١٠٠

∴ نق = ١٠ سم

$\frac{١}{٢}$ ل نق = ٢٥ط

٥ ل = ٢٥ط ∴ ل = ٥ط

المخروط

ل = ١٠ سم

٢ط نق = ٥ط

∴ نق = ٢,٥ سم

ع = $\sqrt{ل^٢ - نق^٢}$ = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٢,٥)^٢}$

= ٩,٦٨ سم

المساحة الجانبية - الكلية - الحجم للمخروط الدائرى القائم

١- المساحة الجانبية = ط ل نق

$\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × طول الراسم = $\frac{١}{٢}$ × ٢ط نق ل

٢- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ط ل نق + ط نق٢

= ط نق (ل + نق)

٣- حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ ط نق٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ حجم الاسطوانة

مثال ٤ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه = ٨ سم أوجد

أ) المساحة الجانبية ب) المساحة الكلية

جـ) الحجم

الحل

∵ م أ ⊥ ب م

∴ ل = $\sqrt{(٨)^٢ + (٦)^٢}$ = ١٠ سم

نق = ٦ سم ع = ٨ سم ل = ١٠ سم

أ) المساحة الجانبية = ط نق ل = ط × ٦ × ١٠ = ٦٠ط سم٢

ب) المساحة الكلية = ط نق ل + ط نق٢ = ٦٠ط + ٣٦ط = ٩٦ط سم٢

جـ) الحجم = $\frac{١}{٣}$ ط نق٢ ع = $\frac{١}{٣}$ × ط × ٣٦ × ٨ = ٩٦ط سم٣

أذا كان ....

1= 17

2= 33

3= 49

4= 65

5= ??????

مثال ٥

مخروط دائري قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ٢٥ سم

أوجد

١) مساحته الجانبية

٢) مساحته الكلية

٣) حجمه

مثال ٦

أوجد طول نصف قطر مخروط دائري قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم² وطول راسمه ٣٠ سم

الحل

المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

∴ π نق (ل + نق) = ٦١٦ π

نق (٣٠ + نق) = ٦١٦

٣٠ نق + نق² = ٦١٦

نق² + ٣٠ نق − ٦١٦ = ٠

(نق − ١٤) (نق + ٤٤) = ٠

إما نق = ١٤ سم أو نق = −٤٤ مرفوض

∴ طول نصف القطر = ١٤ سم

مثال ٧

مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صهر وحول إلى مخروط دائري قائم ارتفاعه ٢١ سم، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل ($\pi = \frac{22}{7}$)

الحل

حجم الشمع = حجم المكعب = (٢٠)³ = ٨٠٠٠ سم³

المفقود ١٢٪

∴ المتبقي = حجم المخروط

= ٨٠٠٠ × ٨٨٪ = ٧٠٤٠ سم³

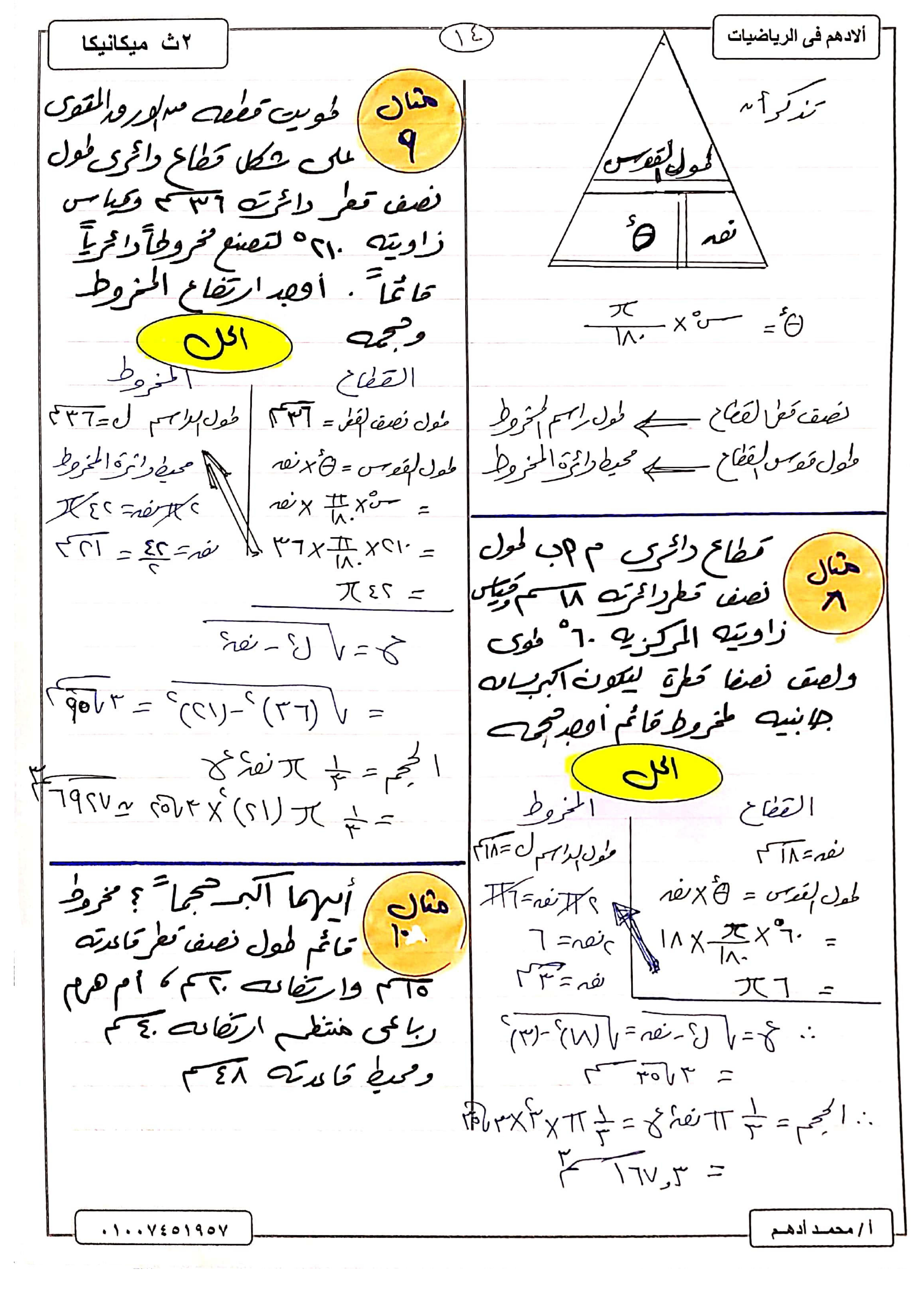
∴ $\frac{1}{3}$ π نق² ع = ٧٠٤٠

$\frac{1}{3}$ × $\frac{22}{7}$ × نق² × ٢١ = ٧٠٤٠

∴ ٢٢ نق² = ٧٠٤٠

نق² = $\frac{7040}{22}$ = ٣٢٠

∴ نق = $\sqrt{320}$ = ٨ $\sqrt{5}$ سم



تذكر أن

$هـ = س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠}$

نصف قطر القطاع ← طول راسم المخروط

طول قوس القطاع ← محيط دائرة المخروط

مثال ٨

قطاع دائري م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفا قطره ليكون أكبر ساحة جانبية لمخروط قائم أوجد حجمه

الحل

القطاع:

نق = ١٨ سم

طول القوس = هـ × نق

$= ١٨ \times \frac{\pi}{١٨٠} \times ٦٠^\circ$

$= ٦\pi$

المخروط:

طول الراسم ل = ١٨ سم

٢π نق $= ٦\pi$

٢ نق = ٦

نق = ٣ سم

$\therefore$ ع $= \sqrt{ل^2 - نق^2} = \sqrt{(١٨)^2 - (٣)^2}$

$= ٣\sqrt{٣٥}$ سم

$\therefore$ الحجم $= \frac{١}{٣}\pi$ نق^2 ع $= \frac{١}{٣}\pi \times ٣^2 \times ٣\sqrt{٣٥}$

$= ١٦٧٫٣$ سم^3

مثال ٩

طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٣٦ سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطاً دائرياً قائماً. أوجد ارتفاع المخروط وحجمه

الحل

القطاع:

طول نصف القطر = ٣٦ سم

طول القوس = هـ × نق

$= س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠} \times$ نق

$= ٢١٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} \times ٣٦$

$= ٤٢\pi$

المخروط:

طول الراسم ل = ٣٦ سم

محيط دائرة المخروط

٢π نق $= ٤٢\pi$

نق $= \frac{٤٢}{٢} = ٢١$ سم

ع $= \sqrt{ل^2 - نق^2}$

$= \sqrt{(٣٦)^2 - (٢١)^2} = ٣\sqrt{٩٥}$

الحجم $= \frac{١}{٣}\pi$ نق^2 ع

$= \frac{١}{٣}\pi (٢١)^2 \times ٣\sqrt{٩٥} \simeq ٦٩٢٧$ سم^3

مثال ١٠

أيهما أكبر حجماً؟ مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم، أم هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم

مثال ١١

فى الشكل المقابل

أوجد - الارتفاع

المساحة الجانبية - الكلية - الحجم

($\pi = \frac{22}{7}$)

الحل

قطاع	مخروط
نق = ٢١	ل = ٢١ سم
ل = ٤٤ سم	٢ ط نق = ٤٤
	٢ × $\frac{22}{7}$ × نق = ٤٤
	نق = ٧ سم

ع = $\sqrt{ل^2 - نق^2}$ = $\sqrt{(21)^2 - (7)^2}$ = ١٤ $\sqrt{2}$ سم

المساحة الجانبية = ط ل نق = $\frac{22}{7}$ × ٢١ × ٧ = ٤٦٢ سم²

المساحة الكلية = ٤٦٢ + ط نق²

= ٤٦٢ + $\frac{22}{7}$ × $(7)^2$ = ٦١٦ سم²

الحجم = $\frac{1}{3}$ ط نق² ع = $\frac{1}{3}$ × $\frac{22}{7}$ × $(7)^2$ × ١٤ $\sqrt{2}$

= ١٠١٦,٣٥ سم³

مثال ١٢

احسب بدلالة ط

حجم الجسم الناتج من دوران

Δ أ و ب دورة كاملة حول

(أ) محور السينات (ب) محور الصادات

(أ) أولاً حول محور السينات

يكون محور الدوران هو $\overleftrightarrow{وب}$ وهو ع = ٤ سم

∴ ع = ٤ سم نق = ٣ سم ل = ٥ سم

الحجم = $\frac{1}{3}$ ط نق² ع = $\frac{1}{3}$ ط × ٩ × ٤

= ١٢ ط وحدة مكعبة

(ب) ثانياً حول محور الصادات

يكون $\overleftrightarrow{وأ}$ محور الدوران وهو ع = ٣ سم

∴ ع = ٣ سم ، نق = ٤ سم ل = ٥ سم

الحجم = $\frac{1}{3}$ ط نق² ع = $\frac{1}{3}$ ط × ١٦ × ٣

= ١٦ ط وحدة مكعبة

مثال ١٣

فى الشكل المقابل

(شمندورة) لتحديد المجرى الملاحى . احسب تكاليف طلائه بمادة مقاومة لعوامل التعرية ، علماً بأن تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠ جنيه.

الحل

فى المخروط الأعلى ل₁ = ٨٠ سم نق₁ = ٥٠ سم

فى المخروط الأسفل = نق₂ = ٥٠ سم ع₂ = ١٢٠ سم

∴ ل₂ = $\sqrt{(50)^2 + (120)^2}$ = ١٣٠ سم

المساحة الجانبية = ط نق₁ ل₁ + ط نق₂ ل₂

= ط × ٠,٥ × ٠,٨ + ط × ٠,٥ × ١,٣

∴ التكاليف = ٣٠٠ × □ = ٩٩٠ جنيهاً

الواجب

١) أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم ، وطول راسمه ٢٦ سم (٢٠π سم ، ١٠٠π سم²)

٢) أوجد لأقرب رقم عشرى واحد المساحة الكلية لمخروط قائم طول قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم . (٢٨٢,٧ سم²)

٣) أوجد حجم مخروط دائرى قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ٢٥ سم . (١٢٨٣,٨ سم³)

٤) قطعة من الشيكولاتة على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧π سم³ ومحيط قاعدته ٦π سم أوجد ارتفاعه . (٩ سم)

٥) إناء اسطوانى الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمراً كاملاً ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم أوجد طول قطر قاعدة الإناء . (٨ سم)

الحل

الفكرة

حجم المخروط = حجم ماء الإناء المزاح

$\frac{1}{3}\pi$ نق²(مخروط) ع = π نق²(إناء) ع

$\frac{1}{3}\pi \times 4 \times 12 = \pi$ نق² × ١

نق² = ١٦ نق = ٤

∴ طول القطر = ٨ سم

٦) قطاع دائرى م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفا قطره ليكونا أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم . أوجد حجم المخروط . (١٦٧,٣ سم³)

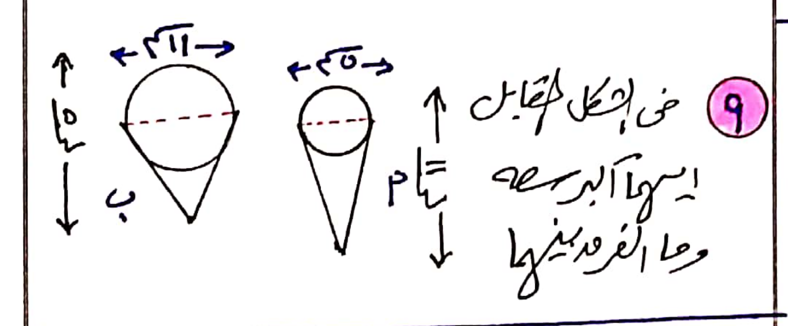
٧) غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم احسب مساحته لأقرب سم³ ($\pi = \frac{22}{7}$) (١٠٧٤ سم²)

هتجيب المساحة الجانبية

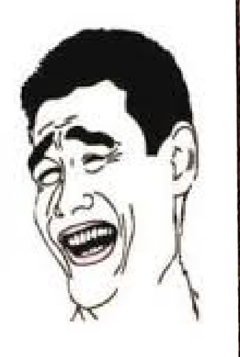
٨) مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم³ أوجد حجمه عندما

$\frac{1}{3}\pi$ نق² ع = ١٠٠ سم³

- يتضاعف ارتفاعه $\frac{1}{3}\pi$ نق² × ٢ع = ٢٠٠ سم³
- يتضاعف طول نصف قطره $\frac{1}{3}\pi$ ٤ نق² ع = ٤٠٠ سم³
- يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره ٨٠٠ سم³



٩) فى الشكل المقابل أيهما أكبر سعة وما الفرق بينهما



من أجمل المعاكسات اللي سمعتها

- اسم القمر ايه ؟؟
- نايل سات يا خفيف
- طيب ممكن التردد :D



أولاً: معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق

(س − د)^{2} + (ص − هـ)^{2} = نق^{2}

الحل

① الدائرة التي مركزها (١، ٢) ونصف قطرها ٥ وحدات طول

(س − ١)^{2} + (ص − ٢)^{2} = ٥^{2}

② الدائرة (س − ٢)^{2} + (ص + ١)^{2} = ٩

يكون مركزها (٢، −١)

وطول نصف قطرها = √٩ = ٣ وحدات طول

ومحيطها = ٢ط نق = ٦ط وحدة طول

ومساحتها = ط نق^{2} = ٩ط وحدة مربعة

ملحوظة

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل س^{2} + ص^{2} = نق^{2}

ثانياً: الصورة العامة لمعادلة الدائرة

س^{2} + ص^{2} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

المركز م = (−ل، −ك)

نق = √(ل^{2} + ك^{2} − جـ)

جـ = ل^{2} + ك^{2} − نق^{2}

مثال ١: أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٢، −٣) وطول قطرها ١٠ سم

الحل

ل = −٢ ك = ٣ نق = ٥

جـ = ل^{2} + ك^{2} − نق^{2}

= (−٢)^{2} + (٣)^{2} − (٥)^{2} = −١٢

س^{2} + ص^{2} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

س^{2} + ص^{2} − ٤س + ٦ص − ١٢ = ٠

تدريب: أوجد معادلة كل من الدوائر التالية حيث م مركزها ونق نصف قطرها

① م (١، −٣) نق = ٢

② م (−٢، ٤) نق = ٦

③ م (٣، ٤) نق = ٥

مثال ٢

أوجد محيط ومساحة كل من الدوائر التالية

بعد ما نجيب المركز ونصف القطر الاول

(١) $س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص - ٤ = ٠$

(٢) $س^٢ + ص^٢ - ٤ص - ٩ = ٠$

(٣) $٧س^٢ + ٧ص^٢ + ٤٢س - ١٤ص + ٢٨ = ٠$

الحل

بالقسمة على ٧

$س^٢ + ص^٢ + ٦س - ٢ص + ٤ = ٠$

م (−٣، ١) ل = ٣ ك = −١ ح = ٤

$نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ح} = \sqrt{(٣)^٢ + (-١)^٢ - ٤}$

$= \sqrt{٩ + ١ - ٤} = \sqrt{٦}$ وحدة طول

ملاحظات على معادلة الدائرة

(١) معادلة من الدرجة الثانية في س، ص

(٢) خالية من الحد المشتمل على س ص

(٣) معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

ولو مش = ١ نقسم المعادلة على معاملهم لحد ما تخليه واحد بالعافية ولو منفعش يبقى مش دائرة.

(٤) لازم $نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ح} > ٠$

يعني $ل^٢ + ك^٢ - ح$ قيمة موجبة

أي موجب

مثال ٣

بين أي من المعادلات الآتية تعبر عن دائرة.

(١) $س^٢ + ٣ص^٢ - ٢س + ٤ص + ٥ = ٠$

ليست معادلة دائرة لأن معامل $س^٢ \neq$ معامل $ص^٢$

(٢) $٢س^٢ - س ص + ٢ص^٢ + ٥س - ص = ٠$

ليست معادلة دائرة لأنها مشتملة على س ص

(٣) $س^٢ + ص^٢ + ٧س - ص + ٨ = ٠$

معامل $س^٢$ = $ص^٢$ = ١

تصلح أن تكون معادلة دائرة

$ل = \frac{-٧}{٢}$ $ك = \frac{١}{٢}$ $ح = ٨$

$نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ح}$

$\because ل^٢ + ك^٢ - ح = (\frac{-٧}{٢})^٢ + (\frac{١}{٢})^٢ - ٨$

$= \frac{٩}{٢} > ٠$

$\therefore$ المعادلة هي معادلة دائرة

ولو مش مصدقني أرسمها

(٤) $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ٦س + ٤ص + ٩ = ٠$

اتفضل هتحلها لوحدك

حالات خاصة

① معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل

$س^2 + ص^2 = نق^2$

② معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل

$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص = 0$

$(ح = 0)$

③ معادلة الدائرة التي مركزها على محور السينات

$(ك = 0)$

$س^2 + ص^2 + 2ل س + ح = 0$

④ معادلة الدائرة التي مركزها على محور الصادات

$(ل = 0)$

$س^2 + ص^2 + 2ك ص + ح = 0$

⑤ معادلة الدائرة التي تمس محور السينات

نق $= |ك|$ ، $ح = ل^2$

نقطة التماس $= (-ل ، 0)$

$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص + ل^2 = 0$

⑥ معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات

نق $= |ل|$ ، $ح = ك^2$

نقطة التماس $= (0 ، -ك)$

$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص + ك^2 = 0$

⑦ معادلة الدائرة التي تمس المحورين

نق $= |ل| = |ك|$ ، $ح = ل^2 = ك^2 =$ نق^2

$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص + ح = 0$

ملاحظات هامة

* إذا كان $أ(س_1 ، ص_1)$ ، $ب(س_2 ، ص_2)$ قطراً في الدائرة

* احداثيات المركز $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

* طول القطر $= \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2}$

* طول العمود المرسوم من النقطة $(س_1 ، ص_1)$ الى المستقيم $أ س + ب ص + ح = 0$

$$= \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + ح|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

* إذا كان $\overline{أب}$ قطراً في دائرة وكان $\frac{1}{2}[أ + ب] = (2 ، -5)$ فمعنى ذلك انه مركز الدائرة $(2 ، -5)$

* اى نقطة تقع على الدائرة فهى تحقق معادلة الدائرة

مثال ٤

أوجد معادلة الدائرة التي أب قطراً فيها حيث أ = (٥، -٢) ، ب = (١، ١٠)

الحل

م $\left(\frac{٥+١}{٢} ، \frac{-٢+١٠}{٢}\right)$ = (٣، ٤)

طول القطر = $\sqrt{(٥-١)^٢ + (-٢-١٠)^٢}$ = ٤$\sqrt{١٠}$

∴ نق = $\frac{٤\sqrt{١٠}}{٢}$ = ٢$\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ ل = -٣ ، ك = -٤ ، نق = ٢$\sqrt{١٠}$

جـ = ل^٢ + ك^٢ - نق^٢

= $(-٣)^٢ + (-٤)^٢ - (٢\sqrt{١٠})^٢$

= -١٥

∴ المعادلة هي س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

س^٢ + ص^٢ - ٦س - ٨ص - ١٥ = ٠

مثال ٥

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، -٤) وتمس محور السينات

الحل

ل = -٥ ، ك = ٤

نق = |ك| = ٤ وحدة طول

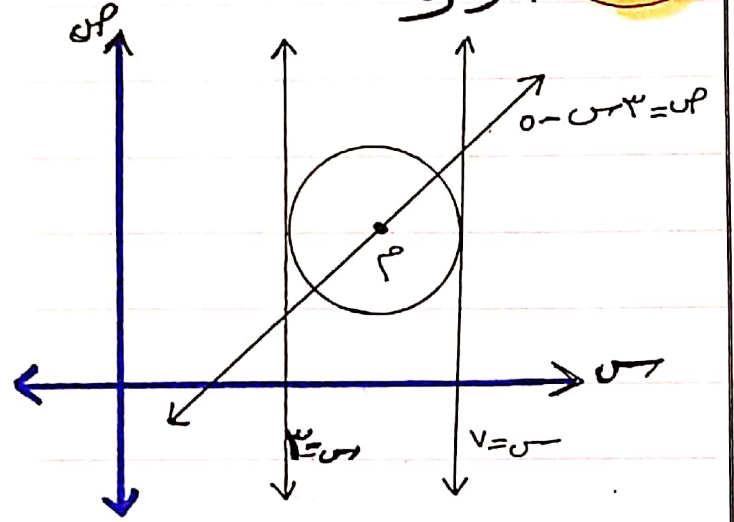
جـ = ل^٢

∴ المعادلة هي س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

س^٢ + ص^٢ - ١٠س + ٨ص + ٢٥ = ٠

مثال ٦

من الشكل المقابل أوجد معادلة الدائرة.



الحل

∵ المستقيمان س = ٣ ، س = ٧ مماسان للدائرة

∴ طول القطر = البعد بينهما = ٤ وحدات

∴ نق = ٢ وحدة طول

والمركز هو منتصف (٥، ص)

∵ المركز يقع على المستقيم ص = ٣س - ٥

∴ يحقق معادلته

ص = ٣ × ٥ - ٥ = ١٥ - ٥ = ١٠

∴ المركز (٥، ١٠)

∴ ل = -٥ ، ك = -١٠ ، نق = ٢

جـ = ل^٢ + ك^٢ - نق^٢ = $(-٥)^٢ + (-١٠)^٢ - ٢^٢$

= ١٢١

∴ المعادلة هي

س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٢٠ص + ١٢١ = ٠

مثال ٧ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها = ٣ وحدات طول ومعادلتا قطرين فيها هما: $س + ص = ٢$ ، $٢س - ص = ٧$

الحل

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع القطرين بحل المعادلتين

$س + ص = ٢$

$٢س - ص = ٧$

$٣س = ٩$ ∴ $س = ٣$ ، $ص = -١$

م $(٣ ، -١)$ نق $= ٣$

$ل = -٣$ ، $ك = ١$

$ح = ل^{2} + ك^{2} - نق^{2} = ٩ + ١ - ٩ = ١$

∴ معادلة الدائرة هى

$س^{2} + ص^{2} - ٦س + ٢ص + ١ = ٠$

مثال ٨ أوجد معادلة التى مركزها م $= (٢ ، ٣)$ والمستقيم $٣س + ٤ص + ٢ = ٠$ مماس لها عند نقطة ا

الحل

م (٢ ، ٣)
ا ب

طول نصف القطر هو البعد العمودى بين $(٢ ، ٣)$ عن المستقيم $٣س + ٤ص + ٢ = ٠$

$$نق = \frac{|٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٢|}{\sqrt{(٣)^{2} + (٤)^{2}}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤ \text{ وحدات}$$

∴ $ل = -٢$ ، $ك = -٣$ ، نق $= ٤$

$ح = ل^{2} + ك^{2} - نق^{2} = ٤ + ٩ - ١٦ = -٣$

∴ المعادلة هى

$س^{2} + ص^{2} - ٤س - ٦ص - ٣ = ٠$

مثال ٩ أوجد المعادلة العامة للدائرة التى تمر بالنقط ا $= (٦ ، ٣)$ ، ب $(٢ ، ٣)$ ، جـ $= (٤ ، ١)$ ثم عين مركزها وطول نصف قطرها.

الحل

نفرض أن المعادلة هى

$س^{2} + ص^{2} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$

بالتعويض بالنقط الثلاث على الترتيب

$٣٦ + ٩ + ١٢ل + ٦ك + جـ = ٠$

$١٢ل + ٦ك + جـ = -٤٥$ (١)

، $٤ + ٩ + ٤ل + ٦ك + جـ = ٠$

$٤ل + ٦ك + جـ = -١٣$ (٢)

، $١٦ + ١ + ٨ل + ٢ك + جـ = ٠$

$٨ل + ٢ك + جـ = -١٧$ (٣)

بحل المعادلات الثلاث $ل = -٤$ ، $ك = -٣$

$جـ = ٢١$

∴ المعادلة هى $س^{2} + ص^{2} - ٨س - ٦ص + ٢١ = ٠$

مركزها $(٤ ، ٣)$

$نق = \sqrt{١٦ + ٩ - ٢١} = ٢$ وحدة طول

مثال ١٠ أوجد معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة
$س^٢ + ص^٢ - ١٢س + ٦ص + ٢٠ = ٠$
بالانتقال (س + ٢ ، ص - ٢)

الحل

الدائرة المعطاه مركزها (٦ ، -٣)
ونق = $\sqrt{٣٦ + ٩ - ٢٠}$ = ٥ وحدة طول
المعادلة المطلوبة
مركزها (٨ ، -٥) نق = ٥
ج = $ل^٢ + ك^٢ - نق^٢$ = ٦٤ + ٢٥ - ٢٥ = ٦٤
∴ المعادلة هى
$س^٢ + ص^٢ - ١٦س + ١٠ص + ٦٤ = ٠$

مثال ١١ بين أى النقط التالية تنتمى إلى الدائرة د التى معادلتها
$(س - ٦)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٢٥$
، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة حيث
أ (٩ ، ٣) ب (٧ ، ٥)
ج (٣ ، ٣) د (٢ ، -٣)

الحل

$(س - ٦)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٢٥$ نق = ٥
بالتعويض بالنقط أ ، ب ، ج ، د
* أ (٩ ، ٣)
$(٩ - ٦)^٢ + (٣ + ١)^٢ = ٢٥ = نق^٢$
∴ أ تقع على الدائرة

* ب (٧ ، ٥)
$(٧ - ٦)^٢ + (٥ + ١)^٢ = ٣٧ > نق^٢$
∴ ب تقع خارج الدائرة.

* ج (٣ ، ٣)
$(٣ - ٦)^٢ + (٣ + ١)^٢ = ٢٥ = نق^٢$
∴ ج تقع على الدائرة.

* د (٢ ، -٣)
$(٢ - ٦)^٢ + (-٣ + ١)^٢ = ٢٠ < نق^٢$
∴ د تقع داخل الدائرة.

مثال ١٢ هل الدائرتان
$م_١ : س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٨ص + ١٦ = ٠$
، $م_٢ : س^٢ + ص^٢ + ١٤س + ١٠ص - ٢٦ = ٠$
متماستان من الخارج ؟ ولماذا

الحل

$م_١$: $م_١$ (٥ ، ٤)
$نق_١ = \sqrt{(-٥)^٢ + (-٤)^٢ - ١٦}$
$نق_١$ = ٥ وحدة طول

$م_٢$: $م_٢$ (-٧ ، -٥)
$نق_٢ = \sqrt{٤٩ + ٢٥ + ٢٦}$
= ١٠ وحدة طول

$نق_١ + نق_٢$ = ٥ + ١٠ = ١٥ وحدة طول
$م_١م_٢ = \sqrt{(٥ + ٧)^٢ + (٤ + ٥)^٢}$
= ١٥ وحدة طول
∵ $م_١م_٢ = نق_١ + نق_٢$
∴ الدائرتان متماستان من الخارج

مثال ١٣ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م(٥، ٤) وتمس المستقيم س = ٢

الحل

∵ الدائرة تمس المستقيم س = ٢

∴ نق = |٥ - ٢| = ٣ وحدات

ل = -٥   ك = -٤   نق = ٣

د = ٢٥ + ١٦ - ٩ = ٣٢

∴ المعادلة هى

س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٨ص + ٣٢ = ٠

مثال ١٤ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها يقع فى الربع الأول وطول نصف قطرها = ٣ وحدات طول والمستقيما ن س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها

الحل

نق = ٣   المركز (س، ص)

س - ١ = ٣   س = ٤

ص - ٢ = ٣   ص = ٥

∴ م (٤، ٥)

ل = -٤   ك = -٥   نق = ٣

د = ١٦ + ٢٥ - ٩ = ٣٢

المعادلة هى س^٢ + ص^٢ - ٨س - ١٠ص + ٣٢ = ٠

مثال ١٥ أوجد لأقرب سم^٢ . مساحة سطح شكل خماسى منتظم تمر برؤوسه الدائرة:

س^٢ + ص^٢ + ٦س - ١٢ص + ٥ = ٠

علماً بأن كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٥ سم

الحل

ل = ٣   ، ك = -٦   د = ٥

نق^٢ = ٩ + ٣٦ - ٥ = ٤٠

مساحة الشكل الخماسى المنتظم [داخل دائرة]

= $\frac{ن}{٢}$ نق^٢ جا($\frac{٣٦٠}{ن}$) =

$\frac{٥}{٢}$ × ٤٠ × جا ٧٢° ≃ ٩٥,١٠٥٦٥ وحدة مربعة

∵ الوحدة المربعة تمثل مساحة قدرها (٥)^٢ = ٢٥ سم^٢

∴ مساحة الخماسى = ٩٥,١٠٥٦٥ × ٢٥ ≃ ٢٣٧٨ سم^٢

مثال ١٦ صمم مهندس معمارى مبنى قاعدته على شكل ثمانى منتظم ، تمر برؤوسه الدائرة

س^٢ + ص^٢ - ٤س + ١٢ص - ٦٠ = ٠

احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة

الحل

ل = -٢   ك = ٦   د = -٦٠

نق^٢ = ٤ + ٣٦ + ٦٠ = ١٠٠

∴ مساحة الثمانى المنتظم الذى تمر برؤوسه الدائرة

= $\frac{ن}{٢}$ نق^٢ جا($\frac{٣٦٠}{ن}$)

= $\frac{٨}{٢}$ × ١٠٠ × جا ٤٥° = ٢٠٠√٢ وحدة تقريبية

≃ ٢٨٣ وحدة مربعة

الواجب

س١ اكتب معادلة الدائرة التي مركزها م وطول نصف قطرها (نق) في الحالات التالية

(١) م = (٢، ٣) ، نق = ٥

(٢) م = (٠، ١) ، نق = $٢\sqrt{٣}$

(٣) م = (-٤، -٣) ، نق = $\frac{٣}{٢}$

س٢ أوجد احداثي المركز ، ونق لكل مما

(١) $س^٢ + ص^٢ - ٩ = ٠$

(٢) $(س + ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩$

(٣) $س^٢ + (ص + ٧)^٢ = ٢٤$

(٤) $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$

(٥) $س^٢ + ص^٢ - ٨س = ١٢$

س٣ أوجد معادلة الدائرة في الحالات التالية

(١) مركزها م (-٢، ٣) وطول قطرها ٨ وحدات

(٢) مركزها م (٥، -١٢) وتمر بنقطة الاصل

(٣) مركزها نقطة الاصل ونق = ٥ وحدات

(٤) مركزها م (٧، -٥) وتمر بالنقطة أ (٣، ٢)

(٥) أب قطر فيها حيث أ (٦، -٤) ، ب (٠، ٢)

(٦) مركزها م (٥، ٤) وتمس المستقيم س = ٢

(٧) تمس المحورين وتمر بالنقطة (-٢، -٤)

(٨) تمس محور السينات عند (-٣، ٠) وتمس أيضاً الصادات

(٩) يقع مركزها على محور السينات وتمر أ (١، ٣) ، ب (٢، -٤)

(١٠) أب قطر فيها حيث أ ، ب نقطتي تقاطع الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٢س + ٤ص = ٠$ مع محور السينات

س٤ في احدى المدن وعلى نظام احداثي متعامد حيث كل وحدة تمثل ٥ أمتار. وجدنا أن الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٨ص + ١١ = ٠$ تحدد أحد ميادينها ، أوجد لأقرب متر مربع مساحة هذا الميدان ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) (١١٠٠ م٢)

س٥ يقع رادار عند الموقع أ (٧، -٩) ويغطي منطقة دائرية طول نصف قطرها ٣٠ وحدة طول اكتب معادلة الدائرة التي تحدد مجال عمل الرادار في المستوى الاحداثي . هل يمكن للرادار رصد سفينة في الموقع ب (٢٥، -٣٠) ؟ ولماذا

س٦ ترسان في آلة مراكزهما على مستقيم يوازي محور الصادات وأقصر بعد بين حافتيهما ١٠ وحدات

١٠

أوجد معادلة الترس الاصغر علماً بأن معادلة الترس الاكبر هي $س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٨ص + ٣٢ = ٠$